

## Research Paper

# Calculation of Probability Distribution of Future Stock Price Indices Based on Geometric Brownian Model

Mojtaba Rostami<sup>1</sup> , Seyed-nezamuddin Makiyan<sup>\*2</sup> , Rasul Roozegar<sup>3</sup> <sup>1</sup> Ph.D. in Economics, Yazd University, Yazd, Iran, Email: [mojtabarostami1364@yahoo.com](mailto:mojtabarostami1364@yahoo.com)<sup>2</sup> Associate Professor in Economics, Yazd University, Yazd, Iran (Corresponding Author).  
Email: [nmakiyan@yazd.ac.ir](mailto:nmakiyan@yazd.ac.ir)<sup>3</sup> Associate Professor in Statistics, Yazd University, Yazd, Iran. Email: [rroozegar@yazd.ac.ir](mailto:rroozegar@yazd.ac.ir)

10.22080/IEJM.2021.21134.1833

**Received:**

March 6, 2021

**Accepted:**

August 7, 2021

**Available online:**

October 29, 2021

**JEL Classification**

C11, C22, C49, C58

**Keywords:**

Geometric Brownian Model (GBM), Bayesian Methods, MCMC, Forecasting of Future Stock Price Index, Probability Distribution

## Abstract

Forecasting is an essential and growing component of financial theories and applications. Forecasts are expressed in three ways: point, interval, and probability distribution. The largest amount of information a forecast can provide is in the form of a probability distribution. For example, in addition to the mean and conditional variance of other torques including kurtosis and skewness, the probability distribution can also be calculated. This form of forecasting is very important in the financial economy, which is a fundamental risk assessment and uncertainty. Because the sum of all possible events is estimated and the future events may not be missed. Therefore, estimating uncertainty in this case is much more accurate than other forms of forecasting. In the present study, based on the Geometric Brownian Model (GBM), the probability of future stock price index values of Tehran Stock Exchange is calculated. Bayesian parametric approach and MCMC sampling algorithm are used for this purpose. The results show the growth rate of the stock price index at an average rate of 4% in the year 1398 (forecast year) and the probability of limiting events such as the index falling to below the 1397 average is very low (about 7%). The results also show that the probability of falling stock price index in the forecast year is lower than the minimum of the previous year is only 0.0017. Therefore, investing in the stock market is very safe. This information is only available in the manner of predicting the probability of future stock price indexes.

**\*Corresponding Author:** Corresponding AuthorAddress: Economics Dept., Yazd University, Yazd,  
IranEmail: [nmakiyan@yazd.ac.ir](mailto:nmakiyan@yazd.ac.ir)

Tel: +989131514216



## Extended Abstract

### 1. Introduction

Forecasting is an essential and growing part of the economic and financial theories and applications. Future values of economic, commercial and financial variables are important data for current decision-making factors. Prediction is defined as the estimation of the most probable future value of a random variable based on current and past information available in a scientific or non-scientific model. According to this definition, prediction is inextricably linked to the concept of probability. More precisely, favorable predictions are likely to be related to probability. Only in this way, their uncertainty can be measured. Uncertainty is difficult to calculate even if all events and outcomes are known. It will be more difficult to assess uncertainty when it comes to predicting events with uncertain possible scenarios. Predicting the distribution of the probability largely eliminates the possibility of inaccurate measurement of the uncertainty resulting from the forecasting.

In general, a prediction can be presented in three ways:

1. In the form of a number (point prediction)
2. In the form of a set of numbers, from which a certain value can be expected to be the same as the future variable (interval prediction)
3. In the form of a possible distribution of variables future values (density forecasting)

The third technique provides more information about the future values of the variables than the other two ones since the probability distribution of future values of

the variable contains more information. As a result, forecasting uncertainties can be calculated. However, making such a prediction, unlike the first and second techniques, requires the imposition of more assumptions and more complex calculations.

In financial markets, investors' current decisions will depend on the value of future asset prices. Before any further study, we must answer this important question about financial variables: whether they can be predicted in principle or not?

### 2. Research Methodology

The purpose of this study is to calculate the probability distribution of future values of the stock price index. There are various methods for estimating the probability distribution of a variable. One of such methods is the kernel estimation or density of the variable by using nonparametric methods. In the present study, using the Bayesian approach of post-distribution of future values of stock prices based on the hypothesis of stock price compliance, a Geometric Brownian process of time (continuous and quantity) has been used. This issue has not been studied in the Iranian economic literature so far and the current study is the first one. Our information and expectations about how the stock price index is moving can lead to better forecasting of the future values of this variable. Therefore, the starting point of this research is to examine the nature of changes in stock prices and to use an accepted model in this field. In the present study, the Efficient Markets Hypothesis has been widely used. This hypothesis states that all information available to stock market investors who base their expectations of future rates of

return on the Rational Expectations Hypothesis is reflected in stock prices. Based on what is meant by information in this definition, we will have three forms of Efficient Market Hypothesis, which are shown below:

1. Weak hypothesis based on past stock prices.
2. Semi-strong hypothesis with all public information available.
3. Strong hypothesis with all public and private information available.

If all the available informations are reflected in their stock prices, the changes in stock prices must be completely random. Therefore, stock prices must necessarily follow a random walk process so that their changes are completely random or, in econometric terms, equivalent to a White Noise process. In the present study, continuous time and continuous value random processes have been used to predict the probability of specific price events.

In this regard, the present study falls into the third category. It is also a probability distribution in terms of the type of prediction. In order to make the prediction, Bayesian approach was used and the desired model was selected using the Efficient Markets Hypothesis. Using this approach, the posterior distribution of pattern parameters was calculated and then the probability distribution of different events was calculated, using simulated Markov Chain Monte Carlo (MCMC). The information obtained using this method of analysis is much broader and more accurate than other types of forecasting. For this reason, this type of forecasting is preferred in risk management.

In this research, establishing the Efficient Markets Hypothesis, the Geometric Brownie process was used to predict the future value of the stock index. The Brownian Geometric pattern of stock price modeling was first used by Bachelier (1900) for stock market prices in Paris. Historical data show exponential (or declining) stock prices which are always positive numbers. These features are one of the reasons why economists want to use Brownian Geometric patterns to model the stock price process. Despite the advantages of the Geometric Brownie process and the probability distribution method, the Brownie Geometric model has some drawbacks in predicting and calculating the path of the stock price index, including the following two important ones:

1. Inability to calculate marginal events such as stock market crashes or booms
2. Inability to consider the clustering nature of turbulence

### 3. Research Findings

According to the results of this study, the average growth rate of the stock price index was 4.9% and the probability that in the following days, the size of the stock price index be less than its maximum value in 2018 was very low (approximately 7% probability of occurrence). In other words, it means that investing in the stock market had a positive return on investment. The results of the study indicate the growing trend of stock price index with an average rate of 4.9 percent in 2019 (forecast year) and the probability of marginal events falling below the average of 2018 was very low (about 7%). The results also show that the probability of the stock price index falling in the forecast year to less than the minimum of the previous year was only



0.0017. Therefore, investing in the stock market that year was safe.

#### **4. Conclusion**

According to this study, such information can only be obtained in the probability prediction method through the Brownian Geometric pattern of future values of the stock price index.

#### **Funding**

There is no funding support.

#### **Authors' Contribution**

Authors contributed equally to the conceptualization and writing of the article. All of the authors approved the content of the manuscript and agreed on all aspects of the work

#### **Conflict of Interest**

Authors declared no conflict of interest.

#### **Acknowledgments**

We are grateful to all the scientific consultants of this paper.

علمی

# محاسبه توزیع احتمال شاخص قیمت‌های آتی سهام براساس الگوی براونی هندسی

مجتبی رستمی<sup>۱</sup>، سید نظام الدین مکیان<sup>۲\*</sup>، رسول روزگار<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> دکتری اقتصاد، دانشکده اقتصاد، مدیریت و حسابداری، دانشگاه یزد. ایمیل: [mojtabarostami1364@yahoo.com](mailto:mojtabarostami1364@yahoo.com)  
<sup>۲</sup> دانشیار اقتصاد، دانشکده اقتصاد، مدیریت و حسابداری، دانشگاه یزد. ایمیل: [nmakiyan@yazd.ac.ir](mailto:nmakiyan@yazd.ac.ir)  
<sup>۳</sup> دانشیار آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد. ایمیل: [rroozegar@yazd.ac.ir](mailto:rroozegar@yazd.ac.ir)

doi 10.22080/IEJM.2021.21134.1833

## چکیده

پیش‌بینی، جزئی اساسی و رو به رشد از تئوری‌ها و کاربردهای اقتصاد و مالی است. پیش‌بینی‌ها به سه شکل نقطه‌ای، فاصله‌ای و توزیع احتمالی بیان می‌شوند. بیشترین حجم اطلاعاتی که یک پیش‌بینی می‌تواند ارائه دهد در شکل توزیع احتمال است. برای مثال می‌توان علاوه بر میانگین و واریانس شرطی سایر گشتاورها از جمله کشیدگی و چولگی را نیز با استفاده از توزیع احتمال محاسبه کرد. این فرم از پیش‌بینی در اقتصاد مالی که ارزیابی ریسک و ناطمینانی اساسی می‌باشد، بسیار با اهمیت است. زیرا مجموعه تمامی پیشامدهای ممکن برآورد می‌شود و پیشامدی که ممکن است در آینده رخ دهد از قلم نمی‌افتد. بنابراین، ارزیابی ناطمینانی در این حالت بسیار دقیق‌تر از سایر شکل‌های ارائه پیش‌بینی است. در پژوهش حاضر براساس الگوی براونی هندسی به محاسبه احتمال مقادیر آتی شاخص قیمت‌های سهام بورس تهران پرداخته است. برای این منظور از رویکرد پارامتری بیزی و الگوریتم نمونه‌گیری MCMC استفاده شده است. نتایج پژوهش حاکی از روند رشد شاخص قیمت‌های سهام با نرخ متوسط ۴/۹ درصد در سال ۱۳۹۸ بوده (سال پیش‌بینی) و احتمال رخدادهای حدی مانند سقوط شاخص به کمتر از متوسط سال ۱۳۹۷ بسیار اندک (تقریباً حدود ۷ درصد) برآورد شده است. همچنین نتایج نشان می‌دهند که احتمال سقوط شاخص قیمت‌های سهام در سال پیش‌بینی به کمتر از مینیمم سال قبل آن تنها ۰/۰۰۱۷ است. بنابراین، سرمایه‌گذاری در بازار سهام مطمئن می‌باشد. این اطلاعات تنها در شیوه پیش‌بینی احتمال مقادیر آتی شاخص قیمت‌های سهام قابل با الگوی براونی قابل دستیابی است.

تاریخ دریافت:

۱۶ اسفند ۱۳۹۹

تاریخ پذیرش:

۱۶ مرداد ۱۴۰۰

تاریخ انتشار:

۷ آبان ۱۴۰۰

طبقه‌بندی JEL:

C11, C22, C49, C58

کلیدواژه‌ها:

الگوی براونی هندسی (GBM)، روش‌های بیزی، MCMC، پیش‌بینی شاخص قیمت‌های سهام، توزیع احتمال

این مقاله مستخرج از رساله دکتری می‌باشد که در گروه اقتصاد دانشگاه یزد به انجام رسیده است.

\* نویسنده مسئول: سید نظام الدین مکیان

آدرس: گروه اقتصاد، دانشکده اقتصاد، مدیریت و حسابداری ایمیل: [nmakiyan@yazd.ac.ir](mailto:nmakiyan@yazd.ac.ir)

تلفن: ۰۹۱۳۱۵۱۴۲۱۶

دانشگاه یزد، یزد، ایران

## ۱ مقدمه

آتی متغیر نسبت به موارد دیگر شامل اطلاعات بیشتری است. در نتیجه می‌توان نااطمینانی پیش‌بینی‌ها را محاسبه کرد. با این حال ارائه چنین پیش‌بینی برخلاف موارد (۱) و (۲) نیازمند تحمیل فروض بیشتر و محاسبات پیچیده‌تری است.

در بازارهای مالی تصمیم‌گیری‌های کنونی سرمایه‌گذاران به مقادیر قیمت‌های آتی دارایی‌ها بستگی خواهد داشت. قبل از هرگونه بررسی بیشتر، باید به این سوال مهم در زمینه متغیرهای مالی پاسخ دهیم که آیا اساساً می‌توان آنها را پیش‌بینی کرد یا خیر؟ به طور کلی، یک فرآیند قیمتی مانند  $P_t$  را با تعریف  $P_t: (\Omega \times (0, \infty), \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}) \rightarrow (R, \mathcal{B})$  که نشان دهنده یک میدان بورل<sup>۱</sup> و  $\mathcal{F}$  نشان دهنده فضای پیشامدهای مورد بررسی است، نسبت به یک پالایه<sup>۲</sup>  $\Omega = (\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_t, \dots, \Omega_T)$  را پیش‌بینی پذیر گویند، اگر برای هر  $t$ ،  $P_t$  فرآیندی  $\Omega_{t-1}$ -اندازه پذیر<sup>۳</sup> باشد (کلنبر<sup>۴</sup>، ۲۰۰۵). به عبارت دیگر اگر مقدار  $P_t$  به وسیله اطلاعات موجود در پالایه  $\Omega$  تا زمان  $t-1$  و خود زمان  $t-1$  تعیین شود فرآیند را پیش‌بینی پذیر گویند. بیان دیگر اندازه پذیر آن است که مقدار آتی قیمت را می‌توان با استفاده از یک توزیع احتمال بیان کرد. می‌توانیم در صورت وجود چنین توزیع احتمالی نتایج آن را براساس کمیت امید ریاضی شرطی قیمت‌ها یا  $E(P_t | \Omega_{t-1})$  بیان کنیم. بنابراین، مدل‌سازی شاخص قیمت‌های سهام باید به گونه‌ای صورت پذیرد که بدون نیاز به وضع فروض پیچیده یک پالایه اندازه پذیر برای فرآیند تصادفی شاخص قیمت‌های سهام وجود داشته باشد. در این صورت اثبات می‌شود که اگر تابع زیان درجه دوم برای پیش‌بینی انتخاب شود، بهترین تقریب قیمت‌های دارایی به وسیله اطلاعات موجود در  $\Omega_{t-1}$  کمیت  $E(P_t | \Omega_{t-1})$  خواهد بود. این موضوع

پیش‌بینی مقادیر آتی متغیرهای تجاری و مالی داده‌های مهمی در تصمیم‌گیری‌های کنونی اقتصادی هستند. براساس تعریف، پیش‌بینی عبارت است از تخمین محتمل‌ترین مقدار آتی یک متغیر تصادفی با توجه به اطلاعات کنونی و گذشته‌ی در دسترس براساس یک مدل علمی (مبتنی بر تئوری‌های علمی) یا غیرعلمی. در این تعریف مشخص می‌شود که پیش‌بینی ارتباط جداناپذیری با مفهوم احتمال دارد. به طور دقیق‌تر پیش‌بینی‌های مطلوب به شکل احتمالی بیان می‌شوند، زیرا تنها در چنین شکلی است که می‌توان نااطمینانی آنها را اندازه گرفت. محاسبه نااطمینانی حتی در صورتی که تمامی پیشامدها و نتایج شناخته شده باشند دشوار است. در مسئله پیش‌بینی که برخی از پیشامدهای مجموعه تمام حالات ممکن می‌تواند نامشخص باشد ارزیابی نااطمینانی دشوارتر خواهد بود. پیش‌بینی توزیع احتمال عدم دقت اندازه‌گیری نااطمینانی حاصل از پیش‌بینی را تا حدود زیادی برطرف می‌کند. به طور کلی، یک پیش‌بینی را به سه شکل می‌توان ارائه کرد:

(۱) به شکل یک عدد (پیش‌بینی نقطه‌ای)

(۲) به شکل مجموعه‌ای از اعداد، که می‌توان انتظار داشت مقدار معینی از آنها همان مقدار آتی متغیر است (پیش‌بینی فاصله‌ای)

(۳) به شکل توزیع احتمالی از مقادیر آتی متغیر (پیش‌بینی چگالی)

روش (۳) نسبت به دو روش دیگر اطلاعات بیشتری را در مورد مقادیر آتی متغیرها ارائه می‌کند. این موضوع بخاطر آن است که توزیع احتمال مقادیر

<sup>۳</sup> اندازه پذیر به معنای آن است که می‌توان بر فضای پیشامدهای مورد بررسی یک تابع احتمال تعریف کرد.

<sup>۴</sup> Klebaner, F. C

<sup>۱</sup> میدان بورل (Borel Field) کوچکترین سیگما-جبر تعریف شده بر فضای اعداد حقیقی می‌باشد. اعضای این میدان مجموعه‌های باز تعریف شده بر  $R$  می‌باشد.

<sup>۲</sup> Filtration

## ۲ مبانی نظری

### ۲٫۱ مفهوم کلی پیش بینی توزیع احتمال مقادیر آتی یک متغیر

پیش‌بینی به منظور اتخاذ تصمیم درست صورت می‌گیرد. در مسائل مربوط به سرمایه‌گذاری در بازارهای مالی پیش‌بینی نقطه‌ای کفایت لازم را ندارد و پیش‌بینی توزیع احتمال متغیر موثر بر تصمیم‌گیری لازم است. پسران<sup>۵</sup> (۲۰۱۵) در چارچوبی ساده حالتی را توصیف می‌کند که دو وضعیت بد و خوب می‌توانند در آن روی دهند. با فرض آنکه احتمال رخداد بد در زمان  $t+1$  برابر با  $\pi_{t+1}$  آنگاه  $\pi_{t+1|t}$  پیش‌بینی احتمال دوره  $t+1$  در زمان  $t$  می‌باشد. به طور کلی، به منظور انجام چنین پیش‌بینی‌هایی ابتدا برای متغیر تصمیم باید یک الگو معرفی شود. متغیر تصمیم در زمان  $t+1$  با  $y_{t+1}$  و چگالی احتمال مقادیر آن با توجه به مجموعه اطلاعات موجود در زمان  $t$  به صورت  $\pi(y_{t+1}|\Omega_t)$  نشان داده می‌شود که در آن  $\Omega_t$  نشان دهنده مجموعه اطلاعات موجود تا زمان  $t$  است که در پیش‌بینی  $y_{t+1}$  مورد استفاده قرار می‌گیرد.<sup>۶</sup> به دو روش می‌توان  $\pi(y_{t+1}|\Omega_t)$  را برآورد کرد: روش‌های پارامتری و ناپارامتری. در این زمینه اطلاعات بسیار مناسبی را می‌توان در پسران و تیمرمن<sup>۷</sup> (۱۹۹۲)، پسران و گرنجر<sup>۸</sup> (۲۰۰۰)، وبهارد و پرایس<sup>۹</sup> (۲۰۰۸)، اسمیت و والیس<sup>۱۰</sup> (۲۰۰۹) و قاش و برا<sup>۱۱</sup> (۲۰۰۵) یافت. به طور کلی الیوت و تیمرمن<sup>۱۲</sup> (۲۰۱۶) منبع بسیار غنی در زمینه پیش‌بینی اقتصادی را در اختیار محققین این حوزه قرار می‌دهند.

به معنای آن است که تمامی روش‌های ارائه پیش‌بینی از روش پیش‌بینی توزیع احتمال قابل استخراج و استنباط می‌باشند. در زمینه پیش‌بینی پذیری شاخص قیمت سهام و بازده سهام می‌توان به پسران و ویل<sup>۱</sup> (۲۰۰۶)، لو<sup>۲</sup> (۲۰۰۴) و بابریس و تالر<sup>۳</sup> (۲۰۰۳) رجوع کرد.

هدف پژوهش حاضر محاسبه توزیع احتمال مقادیر آتی شاخص قیمت‌های سهام است. روش‌های مختلفی برای تخمین توزیع احتمال یک متغیر وجود دارد که می‌توان به تخمین کرنل<sup>۴</sup> یا هسته چگالی متغیر مورد نظر با استفاده از روش‌های ناپارامتری اشاره کرد. در پژوهش حاضر با استفاده از رویکرد بیزی توزیع پسین مقادیر آتی قیمت‌های سهام براساس فرضیه تبعیت قیمت‌های سهام از یک فرآیند زمان - پیوسته و مقدار - پیوسته براونی هندسی استفاده شده است.

این موضوع در ادبیات اقتصادی ایران تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است و پژوهش کنونی اولین پژوهش از این دست می‌باشد. در ادامه ساختار پژوهش حاضر به صورت زیر خواهد بود:

در بخش دوم مبانی نظری ارائه می‌شود، بخش سوم تصریح مدل‌ها، در بخش چهارم نحوه برآوردها و مقایسه مدل‌ها و در بخش پنجم یافته‌های تجربی مورد بحث قرار می‌گیرد و در بخش پایانی خلاصه و نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

<sup>7</sup> Pesaran and Timmermann

<sup>8</sup> Pesaran and Granger

<sup>9</sup> Vabhard and Price

<sup>10</sup> Smith and Wallis

<sup>11</sup> Ghosh and Ber

<sup>12</sup> Elliot and Timmermann

<sup>1</sup> Pesaran and Weale

<sup>2</sup> Lo

<sup>3</sup> Baberis and Thaler

<sup>4</sup> Kernel Density Estimation

<sup>5</sup> Pessaran

<sup>۶</sup> توزیع احتمال متناظر به صورت

$$\Pi_t(y) = \int_{-\infty}^y \pi(s|\Omega_t) ds$$

محاسبه خواهد شد.

سهام و استفاده از یک الگوی پذیرفته شده در این زمینه است. در حوزه پژوهش حاضر فرضیه بازارهای کارا<sup>۱</sup> به طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته است. این فرضیه بیان می‌دارد که همه‌ی اطلاعات در دسترس سرمایه‌گذاران بازارهای سهام که انتظاراتشان از نرخ‌های آتی بازده را براساس فرضیه انتظارات عقلایی<sup>۲</sup> شکل می‌دهند در قیمت‌های سهام بازتاب یافته است (بادی<sup>۳</sup> و همکاران، ۲۰۱۸). براساس اینکه در این تعریف منظور از اطلاعات چیست سه فرم از فرضیه کارایی خواهیم داشت که در جدول زیر نشان داده شده است:

جدول ۱ فرم‌های مختلف فرضیه ی بازارهای کارا

فرم کارایی	مجموعه اطلاعاتی که در قیمت‌های سهام بازتاب می‌یابند
ضعیف	قیمت‌های گذشته سهام
نیمه قوی	همه اطلاعات موجود در دسترس عموم
قوی	همه اطلاعات اعم از عمومی و خصوصی

$V$  است. در رابطه فوق چنانچه  $\varepsilon_t$  به صورت نرمال توزیع شده باشد آنگاه رابطه (۱) معادل یک حرکت براونی<sup>۷</sup> خواهد بود. امیدریاضی و واریانس فرایند  $P_t$  در رابطه (۱) مشروط به  $P_0$  به ترتیب به صورت  $E(P_t|P_0) = P_0 + \mu t$  و  $Var(P_t|P_0) = \sigma^2 t$  می‌باشد. پارامتر  $\mu$  رانش<sup>۸</sup> نامیده می‌شود و جهت کلی گام تصادفی را نشان می‌دهد. پارامتر  $\sigma$  تلاطم نامیده می‌شود و تعیین کننده نوسانات حول میانگین شرطی  $P_0 + \mu t$  است. نمودار ۱ شبیه سازی ۲۰ مسیر تصادفی با استفاده از یک فرآیند گام تصادفی را نشان می‌دهد. همانگونه که در این نمودار مشاهده می‌شود برخی از این مسیر پایین‌تر از محور افقی قرار می‌گیرند که متناظر با مقادیر منفی برای فرآیند تصادفی است.

در پژوهش حاضر از روش پارامتری و رویکرد بیزی برای تخمین  $\pi(y_{t+1}|\Omega_t)$  استفاده شده است. در ادامه با توجه به اهداف این پژوهش ابتدا الگویی که شاخص قیمت‌های سهام از آن تبعیت می‌کند و سپس روش پارامتری دستیابی به نتایج با استفاده از رویکرد بیزی توضیح می‌شود.

## ۲٫۲ فرضیه بازارهای کارا

اطلاعات و انتظارات ما از نحوه حرکت شاخص قیمت‌های سهام می‌تواند منجر به پیش‌بینی بهتر مقادیر آتی این متغیر شود. بنابراین، نقطه آغاز پژوهش، بررسی ماهیت تغییرات در قیمت‌های

اگر تمامی اطلاعات در دسترس در قیمت‌های سهام خود رانشان داده باشند، در این صورت تغییرات در قیمت سهام باید کاملاً تصادفی باشد. بنابراین، قیمت‌های سهام ضرورتاً باید از یک فرآیند گام تصادفی<sup>۴</sup> تبعیت نمایند تا تغییرات در قیمت‌های سهام کاملاً تصادفی باشد یا در اصطلاح اقتصادسنجی معادل یک فرآیند نوفه‌ی سفید<sup>۵</sup> باشد. مدل آماری حرکت قیمت‌های سهام در طول زمان، که با  $P_t$  نشان داده می‌شود به صورت زیر خواهد بود:

$$P_t = \mu + P_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim IID(0, V) \quad (1)$$

در این رابطه،  $\mu$  تغییر قیمت مورد انتظار یا جهش<sup>۶</sup> و  $IID(0, V)$  نشان دهنده مستقل و هم‌توزیع بودن جملات  $\varepsilon_t$  با میانگین صفر و واریانس

<sup>6</sup> Drift

<sup>7</sup> Brownian Motin

<sup>8</sup> Drift

<sup>1</sup> Efficient Market Hypothesis(EMH)

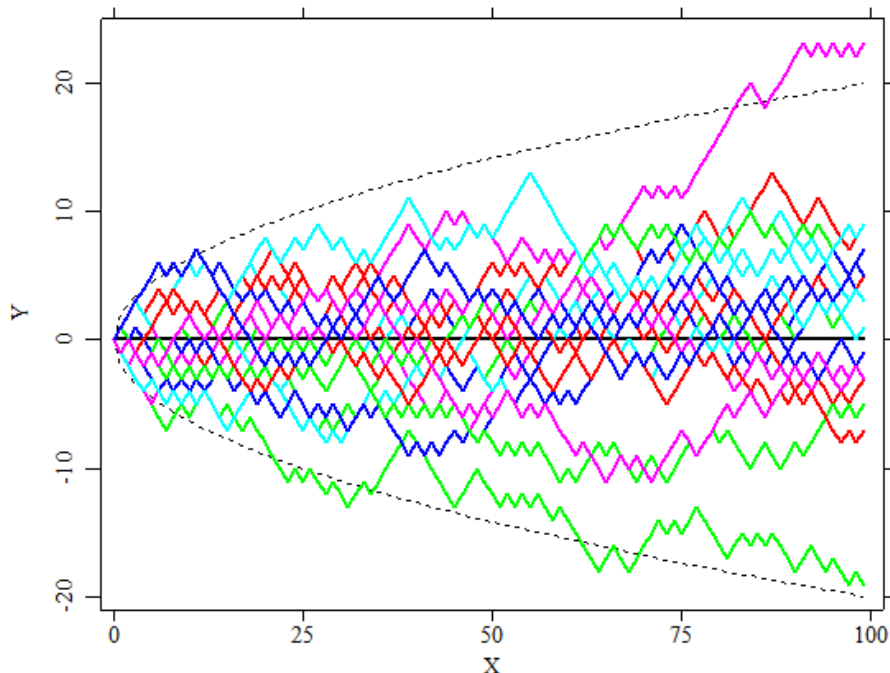
<sup>2</sup> Rational Expectations

<sup>3</sup> Bodie

<sup>4</sup> Random Walk

<sup>5</sup> White Noise





نمودار ۱ شبیه سازی ۲۰ مسیر تصادفی با استفاده از یک فرآیند گام تصادفی

که همواره باید مثبت باشند تناقض آمیز خواهد بود. علاوه بر این ضعف فرآیندهای گام تصادفی، تحلیل‌های تجربی بیان می‌کنند که تغییرات در قیمت‌های سهام تقریباً متناسب با قیمت هستند، به این معنا که سهام با قیمت‌های بالاتر نسبت به سهام با قیمت‌های کمتر تمایل به تغییرات قیمتی بالاتر را نشان می‌دهند. این رفتار را می‌توان به صورت زیر مدل‌سازی کرد:

$$P_t - P_{t-1} = W_t P_{t-1}; t = 1, 2, \dots \quad (3)$$

که  $W_t$  متغیری تصادفی است که تغییرات متناسب در قیمت را بیان می‌کند. با استفاده از تقسیم رابطه فوق بر  $P_{t-1}$  و لگاریتم‌گیری از طرفین رابطه فوق خواهیم داشت:

$$p_t - p_{t-1} = \log \frac{P_t}{P_{t-1}} = \log(W_t + 1) \quad (4)$$

براساس این توضیحات، رابطه‌ی (۱) را در فرم لگاریتمی باید به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \ln(P_t) &= \mu + \ln(P_{t-1}) + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim MD(0, V) \\ P_t &= P_{t-1} \exp[\mu + \varepsilon_t] \end{aligned} \quad (2)$$

در رابطه‌ی فوق همانگونه که مشاهده می‌شود واریانس شرطی  $\varepsilon_t$  تابعی از زمان است و بنابراین فرض استقلال فرآیند نقض می‌شود. در عین حال به دلیل آنکه  $\varepsilon_t$  تفاضل مارتینگل<sup>۱</sup> است فاقد خودهمبستگی است (تسای و چن<sup>۲</sup>، ۲۰۱۸).

### ۲٫۳ گام تصادفی هندسی

فرضیه گام تصادفی بیان می‌کند که نموای (تغییرات) قیمت سهام یا  $X_t = P_t - P_{t-1}$  از نوع نوفه‌ی سفید می‌باشند. برای مثال چنانچه  $\{P_t; t \geq 0\}$  از یک گام تصادفی تبعیت کند، آنگاه تغییرات قیمت از یک فرآیند نوفه سفید ضعیف تبعیت می‌کند. همچنین همانگونه که نمودار ۱ نشان داد هیچ تضمینی وجود ندارد که مسیرهای یک فرآیند تصادفی منفی نباشد و این در مورد قیمت‌های سهام

2 Tsay & Chen

<sup>1</sup> Martingale Difference Sequence

بدست آورد. در این حالت می‌توان  $T$  را بعنوان ترکیبی از  $n$  فاصله زمانی  $dt$  نشان داد. بنابراین  $T = n \cdot dt$ .

$$W(T) - W(0) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \sqrt{dt} \quad (۶)$$

از آنجاکه  $\varepsilon_i$ ها دارای توزیع  $IN(0,1)$  هستند، با فرض  $W(0) = 0$  داریم؛  $E(W(T)) = 0$  و  $var(W(T)) = n \cdot dt = T$

یک فرآیند وینر را می‌توان از یک فرآیند گام تصادفی<sup>۲</sup> بدست آورد. برای این منظور رابطه  $S_T \sim \sum_{t=1}^T \varepsilon_t$  و  $\varepsilon_t \sim IN(0,1)$  که یک گام تصادفی را نشان می‌دهد مفروض می‌گیریم. در این رابطه  $E(S_T) = 0$  و  $var(S_T) = T$  خواهد بود. این موضوع دقیقاً مشابه تعریف  $W(T)$  است. شاخص  $t$  را در محدوده افزایشی  $[0, T]$  بر شاخص  $r$  در محدوده ثابت  $[0, 1]$  می‌توان نگاشت و فرآیند وینر را بر این فاصله به صورت  $W(r)$  تعریف کرد:

اگر  $W(r)$  یک فرآیند وینر باشد، آنگاه برای  $r$  ثابت داریم:

$$W(r) = N(0, r); 0 \leq r \leq 1 \quad (۷)$$

بنابراین فرآیند وینر شبیه یک گام تصادفی پیوسته تعریف شده بر فاصله  $[0, 1]$  است.

به منظور ارائه تصویری از این موضوع، در نمودار ۲ و نمودار ۳ یک فرآیند گام تصادفی با مقادیر شکست مختلف در فاصله  $[0, 1]$  نشان داده شده است. بنابر یافته‌های این نمودارها هرچه تعداد دفعات شکست در این فاصله افزایش یابد، فرآیند گام‌ها فرآیند گام تصادفی به سمت فرآیند وینر میل می‌کند.

در نتیجه با فرض آنکه  $t = 1, 2, \dots, Z_t = p_t - \log(W_t + 1)$  فرآیند  $\{P_t; t \geq 0\}$  از یک فرآیند گام تصادفی هندسی تبعیت می‌کند.

ویژگی این فرآیند آن است که برای برقراری فرضیه بازارهای کارا نرخ بازده  $X_t$  باید بسیار کوچک باشد. الگوهای فوق در دسته‌بندی الگوهای زمان گسسته و در برخی شرایط مقدار گسسته جای می‌گیرند.

## ۲،۳،۱ فرآیندهای تصادفی زمان پیوسته و مقدار پیوسته

در پژوهش حاضر از فرآیندهای تصادفی زمان پیوسته و مقدار پیوسته برای پیش‌بینی احتمال رخدادهای قیمتی خاص استفاده شده است. به منظور توضیح این نوع از فرآیندهای تصادفی، فاصله کوچکی به طول  $dt$  را مفروض می‌گیریم،  $dW$  را به عنوان تغییر در  $W$  در طول  $dt$  تعریف می‌کنیم. با استفاده از دو رابطه زیر رفتار متغیر  $W$  را که از فرآیند وینر تبعیت می‌کند تعریف می‌شود:

i.  $dW$  به  $dt$  با استفاده از رابطه زیر مرتبط می‌شود:

$$dW = \varepsilon \sqrt{dt} \quad (۵)$$

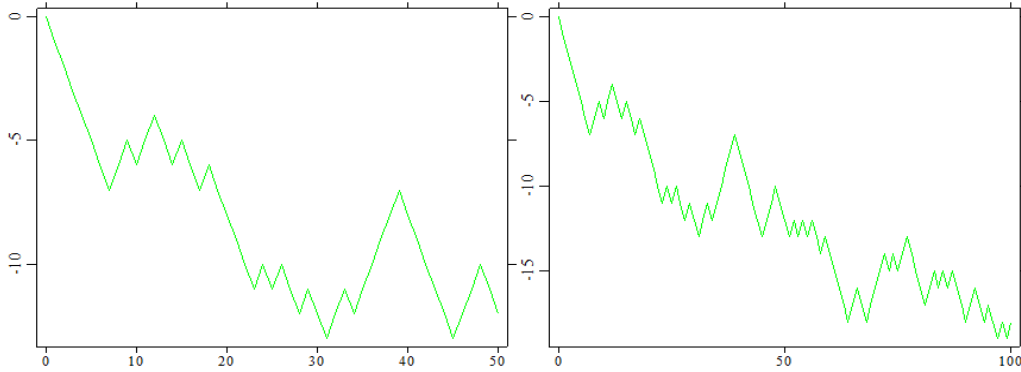
که  $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$  بنابراین  $E[dW] = 0$  و  $Var[dW] = dt$  می‌باشد.

ii. مقادیر  $dW$  به ازای هر دو فاصله متفاوت و کوتاه، مستقل از هم می‌باشند. چرا که  $\varepsilon$ ها به‌طور نرمال و مستقل از هم توزیع شده‌اند.

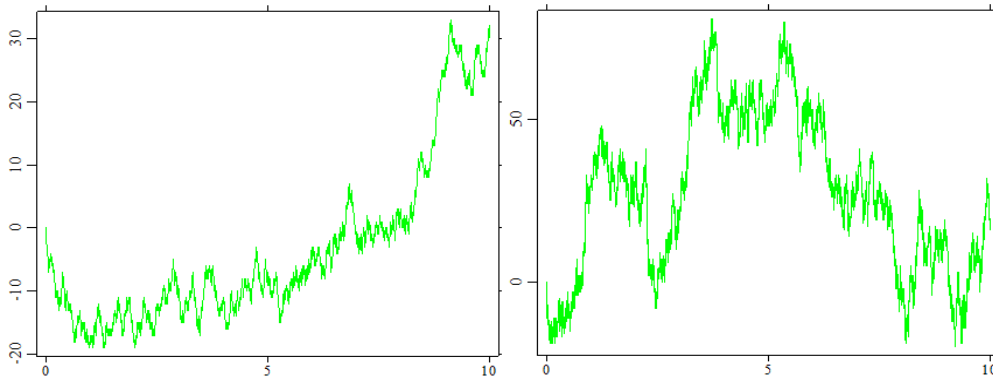
با استفاده از رابطه  $W(T) - W(0)$  می‌توان مقدار  $W$  را در طول دوره زمانی طولانی مدت  $T$

<sup>2</sup> Random Walk

<sup>1</sup> Brownian Motion or Wiener Process



نمودار ۲ شبیه سازی یک فرآیند وینر به ترتیب با استفاده از ۵۰ (سمت چپ) و ۱۰۰ (سمت راست) شکست فاصله



نمودار ۳ شبیه سازی یک فرآیند وینر به ترتیب با استفاده از ۱۰۰۰ (سمت چپ) و ۱۰۰۰۰ (سمت راست) شکست فاصله

$$dx \sim N(adt, bdt) \quad (10)$$

همانند قبل، اگر رفتار متغیر  $x$  را در طول دوره  $T$  بررسی کنیم و تعریف کنیم  $n = \frac{T}{dt}$  آنگاه

$$x(T) \sim N(aT, b^2T) \quad (11)$$

مجدداً، با نگاهی شاخص  $t$  در قلمرو افزایشی  $[0, T]$  بر شاخصی مانند  $r$  در قلمرو ثابت  $[0, 1]$  می‌توان مشاهده کرد که فرآیند تعمیم یافته وینر به صورت زیر نیز نوشته می‌شود:

$$x(T) \sim N(ar, b^2r); 0 \leq r \leq 1 \quad (12)$$

یک فرآیند وینر عمومی که در آن ضرایب  $a$  و  $b$  توابعی از مقادیر اساسی  $x$  و زمان  $t$  هستند را فرآیند ایتوا می‌نامند. این فرآیند به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$dx \sim a(x, t)dt + b(x, t)dW \quad (13)$$

روابط توزیعی فوق بیان می‌کنند که فرآیند وینر یک تابع تصادفی است که در هر نقطه از زمان به صورت نرمال توزیع شده است به گونه‌ای که واریانس آن به شکل خطی در زمان افزایش می‌یابد.

این رابطه، فرآیند وینر پایه با یک نرخ رانش برابر صفر و نرخ واریانس برابر ۱ است. نرخ رانش برابر صفر است، زیرا  $E(W(T)) = 0$  می‌باشد. همچنین، نرخ واریانس برابر با یک است، زیرا  $var(W(T)) = T$  که در  $T$  ضرب شده است. در نتیجه، فرآیند وینر عمومی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$dx = adt + bdW \quad (14)$$

با جایگذاری  $dW = \varepsilon\sqrt{dt}$  خواهیم داشت

$$dx = adt + b\varepsilon\sqrt{dt} \quad (15)$$

بنابراین:

<sup>1</sup> Ito Process

### ۲،۴،۱ ویژگی‌های فرآیند حرکت براونی

- i. به ازای هر  $t > 0$ ،  $X(t)$  دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس  $\sigma^2 t$  است
- ii. تابع میانگین فرآیند حرکت براونی به صورت زیر است

$$E(X(t)) = 0, \forall t \geq 0 \quad (16)$$

- iii. تابع همبستگی فرآیند براونی به صورت زیر است:

$$C(s, t) = \sigma^2 \min(s, t) \quad (17)$$

بنابراین، ضریب همبستگی بین  $X(s)$  و  $X(t)$  به صورت زیر خواهد بود:

$$\rho = \frac{\sigma^2 \min(s, t)}{\sigma\sqrt{t} \cdot \sigma\sqrt{s}} = \frac{\min(s, t)}{\sqrt{ts}} \quad (18)$$

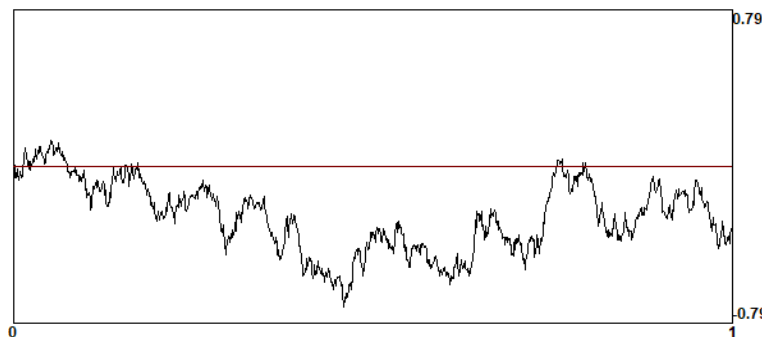
در نتیجه با دورتر شدن  $t$  و  $s$  از یکدیگر، همبستگی دو متغیر ضعیف‌تر می‌شود.

از ویژگی (I) نتیجه می‌شود که فرآیند حرکت براونی مانای اکید نیست و از تابع همبستگی مشخص می‌شود مانای ضعیف نیز نیست.

با توجه به مطالب فوق، یک فرآیند براونی را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$B(t) = \sigma W(t), \quad \sigma > 0 \quad (19)$$

در نمودار ۴ یک فرآیند براونی نشان داده شده است:



نمودار ۴ شبیه سازی یک فرآیند براونی

که  $W$  فرآیند وینر پایه است. هر دو رانش و واریانس فرآیند ایتو در طی زمان تغییر پذیرند. فرآیند دیگری که اغلب استفاده می‌شود، حرکت براونی هندسی است. گفته می‌شود متغیر  $X$  حرکت براونی هندسی دارد اگر:

$$\frac{dx}{x} \sim adt + bdW \quad (14)$$

این فرآیندها در توصیف تحولات قیمت‌های سهام استفاده می‌شوند (کیم و مادالا، ۱۹۹۸).

### ۲،۴ فرآیندهای براونی

فرآیند  $\{X(t): t \geq 0\}$  را حرکت براونی با پارامتر  $\sigma$  (0 گوئیم، اگر؛

- i.  $X(0) \equiv 0$
- ii.  $\{X(t): t \geq 0\}$  دارای نمونه‌های<sup>۲</sup> مستقل باشد،
- iii.  $\{X(t): t \geq 0\}$  دارای نمونه‌های مانا باشد،
- iv. به ازای هر  $t > s \geq 0$ ، متغیر تصادفی  $X(t) - X(s)$  دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس  $\sigma^2(t - s)$  باشد. به عبارت دیگر:

$$P\left(\left(X(t) - X(s)\right) \leq x\right) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(\frac{-u^2}{2\sigma^2(t-s)}\right) du \quad (15)$$

از این تعریف ویژگی‌های زیر برای فرآیند حرکت براونی حاصل می‌شود.

<sup>2</sup> Increment

<sup>1</sup> Maddala and Kim

بنابراین، با استفاده از روابط مشابه در مورد فرآیند براونی هندسی خواهیم داشت:

$$E(X(t)) = \exp\left(\left(a + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right), \text{Var}(X(t)) = \exp((2a + \sigma^2)t)(e^{\sigma^2 t} - 1) \quad (23)$$

لذا امید ریاضی  $X(t)$  در طول زمان به صورت نمایی افزایش می‌یابد. به ویژه زمانی که  $a = 0$  و  $\sigma = 1$  باشد، نتیجه به صورت زیر خواهد بود:

$$E(X(t)) = \exp\left(\frac{t}{2}\right), \text{Var}(X(t)) = \exp(t)(e^t - 1) \quad (24)$$

### ۳ رویکرد بیزی در تخمین پارامترهای فرآیندهای زمان پیوسته و مقدار پیوسته

آمار استنباطی، شناخت<sup>۸</sup> ویژگی‌های عمومی جامعه با استفاده از زیرمجموعه‌ای از اعضای آن جامعه است. پیش از گردآوری مجموعه‌ای از داده‌ها، مقادیر عددی ویژگی‌های عمومی جامعه (پارامترها) و مقادیر عددی مربوط به ویژگی‌های داده‌ها (آماره‌ها) ناشناخته است. پس از گردآوری داده‌ها، از اطلاعات آنها می‌توان در کاهش نااطمینانی مقادیر پارامترها استفاده کرد. آماردانان کلاسیک همچون فیشر<sup>۹</sup> (۱۹۳۶)، کارل پیرسون<sup>۱۰</sup> (۱۹۲۰) و ای. پیرسون<sup>۱۱</sup> (۱۹۶۲) بررسی توزیع احتمال پارامتری که قصد برآورد آن را داریم نسبت به بررسی تابع درستیابی داده‌ها را بیشتر مورد توجه می‌دانند. همه آنها گزاره‌های احتمالی را برای بیان نااطمینانی ترجیح می‌دادند. اما ساختن چنین گزاره‌هایی را ناممکن می‌دانستند به این دلیل که، برای ساختن چنین

<sup>7</sup> Log-Normal

<sup>8</sup> Learning

<sup>9</sup> Fisher

<sup>10</sup> K. Pearson

<sup>11</sup> E. Pearson

### ۲,۴,۲ فرآیند براونی با رانش

یک فرآیند براونی با رانش<sup>۱</sup> دارای فرم عمومی به صورت زیر است:

$$X(t) = at + \sigma W(t), \sigma > 0 \quad (20)$$

در رابطه فوق ضریب  $a$  پارامتر رانش معادله می‌باشد. در این صورت توزیع فرآیند طبق مطالب فوق  $X(t) \sim N(at, \sigma^2 t)$  خواهد بود.

### ۲,۴,۳ فرآیند براونی هندسی

فرآیند براونی هندسی با الگوی بلک-شولز<sup>۲</sup> که برای اختیار معامله استفاده می‌شود متفاوت است. در واقع الگوی بلک-شولز نوع خاصی از الگوی براونی هندسی است. الگوی براونی هندسی<sup>۳</sup> در مورد الگوسازی قیمت‌های سهام اولین بار توسط بشلیر<sup>۴</sup> (۱۹۰۰) در مورد قیمت‌های سهام بازار پاریس مورد استفاده قرار گرفته است (بروکول و دیویس<sup>۵</sup>، فصل ۷، بخش ۵، ۲۰۱۶). به منظور ارائه الگوی براونی هندسی، از فرآیند براونی با رانش لگاریتم‌گیری می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\text{Log}X(t) = at + \sigma W(t), \sim N(at, \sigma^2 t) \quad (21)$$

یک متغیر تصادفی  $Y$  که لگاریتمش گاوسی<sup>۶</sup> است لوگ-نرمال<sup>۷</sup> نامیده می‌شود. اگر که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\text{Log}Y \sim N(a_y, \sigma_y^2) \quad (22)$$

آنگاه دو گشتاور مرتبه اول و دوم این توزیع عبارت خواهند بود از:

$$E(Y) = \exp\left(a_y + \frac{1}{2}\sigma_y^2\right), \text{Var}(Y) = \exp(2a_y + \sigma_y^2)(e^{\sigma_y^2} - 1)$$

<sup>1</sup> Brownian Geometric Motion

<sup>2</sup> Black-Scholes Model

<sup>3</sup> Geometric Brownian Model

<sup>4</sup> Bachelier

<sup>5</sup> Brockwell & Davis

<sup>6</sup> Gaussian Function

قضیه پیشنهادی بیز به طور معمول در آمار به صورت زیر بیان می‌شود:

$$p(\theta|y) = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{\int_{\theta} p(y|\tilde{\theta})p(\tilde{\theta})d\tilde{\theta}} \quad (25)$$

اجزا تشکیل دهنده قضیه فوق عبارتند از:

$p(\theta)$  احتمال حاشیه‌ای  $\theta$  است که احتمال پیشین<sup>۲</sup>  $\theta$  نامیده می‌شود و نااطمینانی محقق را درباره مقادیر پارامتر  $\theta$  پیش از مشاهده داده‌ها را بیان می‌کند. کلمه پیشین در این عبارت نشان دهنده احتمال قبل از مشاهده از اطلاعات  $y$  است.

$p(\theta|y)$  احتمال شرطی  $\theta$  به شرط داده‌های  $y$  است که احتمال پسین<sup>۳</sup>  $\theta$  نامیده می‌شود و نااطمینانی محقق را درباره مقادیر پارامتر  $\theta$  پس از مشاهده داده‌ها بیان می‌کند. کلمه پسین در این عبارت نشان دهنده احتمال بعد از مشاهده از اطلاعات  $y$  است.  $p(y|\theta)$  احتمال شرطی داده‌های  $y$  به شرط داده‌های  $\theta$  است که با عنوان تابع راستنمایی<sup>۴</sup> نامیده می‌شود و نحوه ارتباط داده‌ها را با پارامتر نشان می‌دهد.  $\int_{\theta} p(y|\tilde{\theta})p(\tilde{\theta})d\tilde{\theta}$  احتمال حاشیه‌ای  $y$  را نشان می‌دهد و بعنوان یک ثابت نرمال ساز عمل می‌کند تا اینکه  $p(\theta|y)$  یک مقدار احتمالی باشد مطمئن شویم.

از آنجایی که وجود عبارت  $\int_{\theta} p(y|\tilde{\theta})p(\tilde{\theta})d\tilde{\theta}$  معمولاً برای بررسی ویژگی‌های توزیع پسین  $p(\theta|y)$  ضروری نیست، لذا قضیه بیز (رابطه (۲۵)) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$p(\theta|y) \propto p(y|\theta)p(\theta), \quad (26)$$

نماد  $\propto$  به معنای "متناسب است" می‌باشد. در این رابطه، فرم  $p(y|\theta)$  برخاسته از فرض توزیعی در مورد داده‌هاست،

لذا به صورت تابعی از  $\theta$  به ازای مقادیر ثابت داده‌هاست. این موضوع به معنای آن است که هر تابعی از  $\theta$  همچون  $L(\theta; y)$  به گونه‌ای است که

گزاره‌هایی به اطلاعات پیشین قبل از مشاهده داده‌ها احتیاج است و مشخص نیست که چگونه می‌توان این اطلاعات پیشین یا عدم این اطلاعات پیشین را در قالب توابع احتمال معرفی کرد. رویکرد استنباط بیزی<sup>۱</sup> ادعا می‌کند روشی را برای حل این مسئله یافته و به این ترتیب قادر به اندازه‌گیری میزان کاهش نااطمینانی درباره مقدار پارامترها پس از گردآوری داده‌ها است. بر همین اساس رویکرد استنباط بیزی بدنبال یافتن محتمل ترین مقدار پارامترها براساس داده‌های بدست آمده است و از این منظر در نقطه مقابل رویکرد کلاسیک قرار می‌گیرد که در پی یافتن مقداری از پارامتر است که به ازای آن درستنمایی مشاهده داده‌های موجود حداکثر می‌شود. در پژوهش حاضر چرایی و چگونگی استفاده از رویکرد بیزی به همراه مزیت‌های رویکرد استنباط بیزی را در مسائل اقتصادی و مالی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

### ۳.۱ مبانی استنباط بیزی

مسئله مطرح شده در مقاله معروف بیز (۱۷۶۳) حاوی دو موضوع کلیدی است. موضوع اول آنکه چگونه می‌توان از احتمال بعنوان ابزاری برای بیان نااطمینانی درباره مقادیر نامعلوم استفاده کرد؟ موضوع دیگر به ماهیت شرطی این مسئله برمی‌گردد: بیز علاقمند به دانستن این موضوع بود که مقدار احتمال شرطی شکست در یک آزمایش منفرد، مشروط به داده‌های قبلی حاصل از انجام چنین آزمایشی چگونه قابل ارزیابی است. با استفاده از نمادگذاری ریاضی، وی علاقمند به محاسبه مقدار  $p(\theta|y, n)$  بود که در آن  $\theta$  احتمال شکست نامعلوم است و  $y$  داده‌هایی است که در  $n$  آزمایش برنولی مشاهده می‌کنیم. بیز قضیه‌ایی که ارتباط میان احتمالات شرطی و حاشیه‌ایی یک متغیر تصادفی را نشان می‌دهد را برای محاسبه احتمال شرطی مورد نظرش پیشنهاد کرد.

<sup>3</sup> Posterior Probability

<sup>4</sup> Likelihood Function

<sup>1</sup> Bayesian Inference Approach

<sup>2</sup> Prior Probability

$$\begin{aligned} \theta_1^{(i)} &\sim p\left(\theta_1 \mid y_t, \theta_2^{(i-1)}, \dots, \theta_n^{(i-1)}\right) \\ \theta_2^{(i)} &\sim p\left(\theta_2 \mid y_t, \theta_1^{(i)}, \theta_3^{(i-1)}, \dots, \theta_n^{(i-1)}\right) \\ &\vdots \\ \theta_n^{(i)} &\sim p\left(\theta_n \mid y_t, \theta_1^{(i)}, \theta_3^{(i-1)}, \dots, \theta_{n-1}^{(i)}\right) \\ \theta_1^{(i+1)} &\sim p\left(\theta_1 \mid y_t, \theta_2^{(i)}, \dots, \theta_n^{(i)}\right) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (28)$$

و با ادامه دادن این کار حجم مطلوب نمونه برای محاسبه هر انتگرال به دست می‌آید (مکیان، ۱۳۹۷).

## ۳/۲ توزیع پیشین فرآیند براونی

### هندسی

همانطور که گفته شد، توزیع پیشین باورهای محققین را با استفاده از گزاره‌های احتمالی درباره مقادیر محتمل پارامتر  $\theta$  در فضای پارامتر  $\theta$  توصیف می‌کند. براساس رابطه (۱۵) یک فرآیند براونی دارای این خاصیت است که نمونه‌های آن مستقل و هم توزیع با توزیع نرمال می‌باشند. بنابراین، نمونه‌های فرآیند براونی دارای توزیعی به فرم کلی زیر می‌باشند:

$$X(t) \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (29)$$

در این رابطه  $X(t)$  نمو شاخص قیمت سهام در هر نقطه زمانی  $t$  می‌باشد. از آنجاکه پارامترهای نمو میانگین ثابت و واریانس ثابت به ترتیب  $\mu$  و  $\sigma^2$  می‌باشد، توزیع پیشین را برای این دو پارامتر باید تعریف کنیم. در پژوهش حاضر از توزیع پیشین نرمال-گامی ناآگاهی بخش<sup>۵</sup> برای این پارامترها استفاده شده است. این توزیع های پیشین به صورت زیر تعریف شده اند:

را درباره پارامترها بیان کنیم. پیشین‌های اصطلاحاً ناآگاهی بخش برخی اوقات پیشین‌های مبهم یا پیشین‌های پخشی نیز نامیده می‌شوند. به منظور انعکاس این عدم ازاطلاع قبلی، می‌توانیم از توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس هم چون  $10^3$  استفاده کنیم (یعنی  $p(\mu) = N(0, 10^3)$ ).

به صورت زیر نوشت:  $L(\theta; y) \propto p(y|\theta)$  بنابراین، رابطه (۲۶) را می‌توان

$$p(\theta|y) \propto L(\theta; y)p(\theta), \quad (27)$$

عبارت  $L(\theta; y)$  تابع درستنمایی نامیده می‌شود. رابطه (۲۷) توزیع احتمال مشترک داده‌های مشاهده شده و پارامترها یا  $p(y, \theta)$  را بیان می‌کند. این توزیع مشترک مدل اقتصادسنجی بیزی نامیده می‌شود (رستمی و مکیان، ۱۳۹۸). اکنون نحوه چگونگی تشکیل این دو جزء را به همراه تحلیل و تفسیر نتایج پسین را توضیح دهیم.

## ۲/۳ تخمین توزیع پسین پارامترها

برای تخمین توزیع پسین پارامترهای مدل اقتصادسنجی بیزی از روش شبیه‌سازی زنجیره‌های مارکوفی<sup>۱</sup> (MCMC) با الگوریتم نمونه برداری گیبس<sup>۲</sup> استفاده می‌شود. گیلکز و دیگران<sup>۳</sup> (۱۹۹۶) چگونگی انتگرال‌گیری با ابعاد بالا را با استفاده از MCMC را نشان می‌دهند. الگوریتم نمونه‌برداری گیبس نمونه‌هایی از توزیع رابطه (۲۷) را از هر توزیع پسین تمام شرطی<sup>۴</sup> تک متغیره از متغیرهای غیرقابل مشاهده به صورت تکراری تولید می‌کند. این الگوریتم از توزیع تمام شرطی برای شبیه‌سازی استفاده می‌کند. برای توضیح عملکرد این الگوریتم در محاسبه توزیع پسین حاشیه‌ایی بدون آنکه به کلیت مسئله خدشه‌ایی وارد آید، فرض می‌کنیم که بردار پارامترها به صورت  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$  است و  $\theta_n^{(i)}$  آامین مقدار شبیه‌سازی شده پارامتر  $\theta_n$  باشد. برای شبیه‌سازی با استفاده از نمونه‌برداری گیبس به صورت زیر عمل خواهیم کرد:

1. Markov Chain Monte Carlo (MCMC)

2. Gibbs Sampling

3. Gilks and et al.

4. Full Conditional Distribution

۵ در حالتی که باورهای پیشین مبهم هستند و تبدیل آنها به یک پیشین آگاهی بخش دشوار است، می‌خواهیم بدون آنکه بر استنباط پسین پارامترها تاثیر بگذاریم، نااطمینانی خودمان

## ۴ یافته‌ها

### ۴.۱ بررسی نموداری

نمودار شماره ۵ نرخ انتشار قیمت و بازده سهام ۵۰ شرکت فعال در بورس تهران را در بازه زمانی ۱۳۹۴/۱/۵ تا ۱۳۹۷/۱۱/۲۹ نشان می‌دهد. حرکت قیمت‌های سهام به نظر می‌رسد که از یک الگوی نمایی در طول زمان تبعیت می‌کند.



نمودار ۵ نرخ انتشار داده‌های قیمت

همانگونه که در فصل دو توضیح داده شد، یک فرآیند براونی هندسی با پارامتر رانش  $\mu$  و پارامتر تلاطم  $\sigma^2$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Log}X(t) = \mu t + \sigma W(t), \sim N(\mu t, \sigma^2 t) \quad (29)$$

بنابراین، مصادیق متعدد این فرآیند را می‌توان با استفاده از تبدیل لگاریتمی فرآیند براونی استاندارد (یا فرآیند وینر) بدست آورد. در جدول ۲ تخمین‌های میانگین پسین،  $\hat{E}_p(\theta)$ ، انحراف استاندارد پسین،  $\hat{V}_p^{0.5}(\theta)$ ، خطای شبیه‌سازی مونت کارلو، MCER و فاصله اعتبار ۹۵٪ بردار پارامترهای  $\theta$  فرآیند براونی هندسی تصریح شده در رابطه (۶) نشان داده شده است. به منظور تخمین پارامترهای رانش و تلاطم از روش MCMC به تعداد ۱۰۰۰ تکرار استفاده شده است. نتایج در جدول زیر نشان داده شده است:

$$\begin{aligned} \mu &\sim \sqrt{\frac{1000}{2\pi}} \exp\left(\frac{-1000}{2}\mu^2\right); -\infty < \mu < \infty \quad (30) \\ \sigma^2 &\sim \frac{(0.01)^{\frac{0.01}{2}} (\sigma^2)^{0.01-1} e^{-0.01\sigma^2}}{\Gamma(0.01)}; \sigma^2 > 0 \end{aligned}$$

پس از ترکیب تابع پیشین فوق با داده‌های نمودار توزیع احتمال مقادیر آتی شاخص سهام را در نقاط مورد نظر بدست خواهد آمد.

در گام بعد، پس از محاسبه مقدار متوسط و مقدار ماکزیمم شاخص قیمت در سال ۱۳۹۷ احتمال آنکه شاخص در سال ۱۳۹۸ کمتر از این مقادیر در سال کمتر باشد را محاسبه می‌کنیم.

### ۴.۲ تخمین معادله براونی هندسی قیمت‌های سهام

داده‌های تاریخی قیمت‌های سهام رشدی (یا نزولی) نمایی را نشان می‌دهند و همواره عددی مثبت می‌باشد. این ویژگی‌ها یکی از دلایل رغبت استفاده اقتصاددانان از الگوهای براونی هندسی برای مدل‌سازی فرآیند قیمت‌های سهام می‌باشد.



جدول ۲ تخمین معادله حرکت قیمت های سهام براساس یک فرآیند براونی

پارامترها	$\hat{E}_p(\theta)$	$\hat{V}_p^{0.5}(\theta)$	MCER	فاصله اعتبار ۹۵٪		
				٪۲,۵	٪۵۰	٪۹۷,۵
$\mu$	-۰/۶۹۱۸	۰/۹۰۴۶	۰/۰۰۹۰۰۱	-۲/۴۸۱	-۰/۶۸۷۴	۱/۰۶۳
Max.Prob	۰/۰۶۹۶	۰/۰۴۱۲	۰۴ E-۴/۰۳	۰	۰	۰
Mean.Prob	۰/۰۰۱۷	۰/۱۰۱	۰/۰۰۱۰۷۷	۰	۰	۰
$\sigma^2$	۱۱/۵۲	۵/۵۳۸	۰/۰۵۹۵۵	۵/۱۲۲	۱۰/۲۴	۲۵/۴۲

منبع یافته‌های پژوهش

پیش مشخص (۲) پیش‌بینی زمان رخداد یک پیامد مشخص و (۳) پیش‌بینی سری زمانی. از این نظر پژوهش حاضر در دسته سوم جای می‌گیرد. همچنین از نظر نوع پیش‌بینی از نوع توزیع احتمال می‌باشد. به منظور انجام پیش‌بینی از رویکرد بیزی استفاده گردید و الگوی مورد نظر با استفاده از فرضیه بازارهای کارا انتخاب گردید. با استفاده از این رویکرد، توزیع پسین پارامترهای الگو محاسبه و سپس با استفاده از زنجیره‌های مارکوفی شبیه‌سازی شده، توزیع احتمال وقوع رخدادهاى مختلف محاسبه گردید. براساس نتایج بدست آمده متوسط نرخ رشد شاخص قیمت های سهام برابر با ۴٫۹ درصد است و احتمال آنکه در روزهای سال بعد اندازه شاخص قیمت سهام کمتر از مقدار حداکثر آن در سال ۱۳۹۷ باشد رقم بسیار ناچیزی است (تقریباً ۷ درصد احتمال وقوع دارد، مقدار احتمال ۶/۹ در جدول شماره ۲). این موضوع به معنی آن است که سرمایه‌گذاری در بازار سهام یک سرمایه‌گذاری با بازده واقعی مثبت است. اطلاعاتی که با استفاده از این روش تجزیه و تحلیل بدست می‌آیند بسیار گسترده‌تر و دقیق‌تر از سایر انواع پیش‌بینی می‌باشد. به این علت در مدیریت ریسک این نوع از پیش‌بینی ارجح است.

براساس رابطه فوق متوسط نرخ رشد قیمت‌های سهام (چنانچه از یک فرآیند براونی هندسی تبعیت نماید) برابر با ۴٫۹ است که از رابطه پا نویس بدست می‌آید.<sup>۱</sup> همچنین براساس یافته‌های جدول فوق در صورت تبعیت شاخص قیمت‌های سهام از فرآیند براونی هندسی با مشخصات جدول فوق احتمال آنکه شاخص در سال آینده (سال ۱۳۹۸) کمتر از حداکثر مقدار آن در سال کنونی شود برابر ۰٫۰۶۹ و احتمال آنکه کمتر از مقدار میانگین آن در سال کنونی گردد تنها ۰/۰۱۷ است.

مقایسه انحراف استاندارد پارامترهای برآورد شده  $(\hat{V}_p^{0.5}(\theta))$  با مقدار خطای شبیه‌سازی مونت کارلوی نظیر آنها (MCER) نشان می‌دهد که میزان خطای شبیه‌سازی شده برای همه پارامترها کمتر از ۵ درصد انحراف استاندارد پسین برآورد شده است. این موضوع به معنای پایداری ضرایب می‌باشد و بنابراین برای داشتن نتایج معتبر نیازی به افزایش حجم شبیه‌سازی نیست.

## ۵ خلاصه و نتیجه‌گیری

به طور کلی اهداف پیش‌بینی‌ها در سه دسته جای می‌گیرد: (۱) پیش‌بینی پیامدهای محتمل در زمانی از

<sup>۱</sup> نرخ رشد یک فرآیند براونی هندسی از طریق رابطه

$$\left( \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \right)$$

بدست می‌آید.

## منابع

- Baberis, N. and R. Thaler (2003). *A Survey of Behavioral Finance*. in G. M. Constantinides, M. Harris, and R. Stulz (eds.), *Handbook of Behavioral Economics of Finance*. Amsterdam: Elsevier.
- Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. J. (2018). *Investments and Portfolio Management*. McGraw Hill Education (India).
- Brockwell, P. J., & Davis, R. A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer.
- Elliott, G. and A. Timmermann (2008). Economic Forecasting, *Journal of Economic Literature*. 46, 3-56.
- Elliott, G., C. W. J. Granger, and A. Timmermann (2006). *Handbook of Economic Forecasting*. Vol. I. Amsterdam: North-Holland.
- Fisher R. (1936). Uncertain Inference. *Proc. Am Acad. Arts Sci.* 71:245-258.
- Gilks, W. R., Richardson, S., & Spiegelhalter, D. (1995). *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, Chapman and Hall/CRC.
- Granger, C. W. J. (1992). Forecasting Stock Market Prices: Lessons for Forecasters. *International Journal of Forecasting*, 8, 3-13.
- Granger, C. W. J. and M. H. Pesaran (2000a). A Decision-Based Approach to Forecast Evaluation, in W. S. Chan, W. K. Li, and H. Tong (eds.), *Statistics and Finance: An Interface*. London: Imperial College Press.
- Granger, C. W. J. and M. H. Pesaran (2000b). Economic and Statistical Measures of Forecast Accuracy. *Journal of Forecasting*, 19, 537-560.
- Granger, C. W. J. and P. Newbold (1977). *Forecasting Economic Time Series*. New York: Academic Press.
- Klebaner, F. C. (2005). In *Calculus with Applications*. World Scientific Publishing Company.
- Lo, A. (2004). The Adaptive Markets Hypothesis: Market Efficiency from an Evolutionary Perspective. *Journal of Portfolio Management*, 30, 15-29.
- Maddala, G. K., & Kim, I. M. (1998). Unit Roots, Co-integration, and Structural Change.
- Makiyan S.N. and Rostami M. (2018). *Advances in Econometrics*, 1<sup>st</sup> Edition, Nour-e Elm Press, (in Persian).
- Pearson E., (1962). *Some Thoughts on Statistical Inference*. *Ann Math Stat* 33:394-403.
- Pearson K (1920). *The Fundamental Problems of Practical Statistics*, *Biometrika* 13:1-16.
- Pesaran, M. H. and A. Timmermann (1994). Forecasting Stock Returns: an Examination of Stock Market Trading in the Presence of Transaction Costs. *Journal of Forecasting*, 13, 335-367.
- Pesaran, M. H. and M. Weale (2006). *Survey Expectations*, in C. W. J. Granger, G. G. Elliott, and A.

- Timmermann (eds.), *Handbook of Economic Forecasting*, Amsterdam, Holland.
- Pesaran, M. H. and M. Weale (2006). *Survey Expectations*. in C. W. J. Granger, G. G. Elliott, and A. Timmermann (eds.), *Handbook of Economic Forecasting*, Amsterdam, Holland.
- Rostami, M. and Makiyan S. N. (2019), Bayesian Unit Root Test with Outliers Observations: The Case of Daily Returns of 50 Active in Tehran Stock Exchange Companies, *Econometric Modelling*, 4(14), 59-86, (in Persian).
- Smith, J., & Wallis, K. F. (2009). A Simple Explanation of the Forecast Combination Puzzle, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 71(3), 331-355.
- Tsay, R. S., & Chen, R. (2018). *Nonlinear Time Series Analysis*, Vol. 891, Wiley.